

DOI: 10.16285/j.rsm.2024.0225

复合地基极限承载力的变分极限平衡法分析 ——竖向增强

周志雄¹, 周凤玺^{1,2}, 曹小林¹, 汪 镇³

(1. 兰州理工大学 土木工程学院, 甘肃 兰州 730050; 2. 兰州理工大学 西部土木工程防灾减灾教育部工程研究中心, 甘肃 兰州 730050;
3. 中交一公局第五工程有限公司, 北京 100024)

摘 要: 基于变分极限平衡法, 对设置竖向增强体的复合地基极限承载力开展了理论研究。首先, 以竖向增强体复合地基中滑动土体的静力学平衡方程为基本方程, 结合变分原理建立了地基极限承载力泛函极值的等周约束模型。在此基础上, 利用欧拉方程得到了以潜在滑动面、滑面上法向正应力以及拉格朗日乘子等为基本未知量的控制方程, 并通过引入辅助变量将可动边界转化为固定边界。最后, 利用打靶法对该耦合的两点边值问题进行了数值求解, 得到了问题的精确解答, 并与复合地基设计中简化的等效强度指标法进行了比较, 且分析了置换率、增强体黏聚力和内摩擦角对地基极限承载力的影响。数值分析结果表明, 简化的等效强度指标法可以有效分析竖向增强复合地基极限承载力。

关 键 词: 复合地基; 竖向增强体; 极限承载力; 变分极限平衡法; 打靶法

中图分类号: TU432

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2024) 12-3748-08

Variational limit equilibrium method analysis of ultimate bearing capacity of composite foundation: vertical reinforcement

ZHOU Zhi-xiong¹, ZHOU Feng-xi^{1,2}, CAO Xiao-lin¹, WANG Zhen³

(1. School of Civil Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou, Gansu 730050, China; 2. Western Engineering Research Center of Disaster Mitigation in Civil Engineering of Ministry of Education, Lanzhou University of Technology, Lanzhou, Gansu 730050, China; 3. CCCC First Highway Fifth Engineering Co. Ltd., Beijing 100024, China)

Abstract: Based on the variational limit equilibrium method, the ultimate bearing capacity of composite foundation with vertical reinforcement is studied. Firstly, based on the static equilibrium equation of sliding soil in composite foundation with vertical reinforcement and combined with the variational principle, an isoperimetric constraint model for the functional extremum of the ultimate bearing capacity of foundation is established. On this basis, the control equations with potential sliding surface, normal stress on sliding surface, and Lagrange multiplier as basic unknowns are obtained using the Euler equation, and the movable boundary is transformed into a fixed boundary by introducing auxiliary variables. Finally, the shooting method is used to numerically solve the coupled two-point boundary value problem, obtaining an accurate solution and comparing it with the simplified equivalent strength index method in composite foundation design. Simultaneously, the numerical examples are used to analyze the effects of displacement ratios, reinforcement cohesion, and internal friction angle on the ultimate bearing capacity of the foundation. The numerical results show that the simplified equivalent strength index method can effectively analyze the ultimate bearing capacity of composite foundation with vertical reinforcement.

Keywords: composite foundation; vertical reinforcement; ultimate bearing capacity; variational limit equilibrium method; shooting method

收稿日期: 2024-02-26

录用日期: 2024-04-14

基金项目: 国家自然科学基金 (No.12362032, No.51978320); 甘肃省重点研发计划 (No.23YFFA0063); 甘肃省优秀博士生项目 (No.24JRRA209)。This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (12362032, 51978320), the Key Research and Development Program of Gansu Province (23YFFA0063) and the Excellent Doctoral Program of Gansu Province (24JRRA209).

第一作者简介: 周志雄, 男, 1995年生, 博士研究生, 主要从事岩土工程方面的研究。E-mail: zzz_0603@163.com

通讯作者: 周凤玺, 男, 1979年生, 博士, 教授, 主要从事岩土工程方面的教学与研究。E-mail: geolot@163.com

根据方程组式 (2) 可以得到:

$$V(x_1) = H(x_1) = H(x_2) = M(x_1) = M(x_2) = 0 \quad (5)$$

$$p_u = V(x_1)/2b + q \quad (6)$$

2.3 变分分析

不同的滑裂面函数 $y(x)$ 及其滑裂面上的应力函数 $\sigma(x)$ 会得到不同的复合地基极限承载力 p_u 。因此, 地基极限承载力 p_u 为滑裂面函数 $y(x)$ 和应力函数 $\sigma(x)$ 的泛函问题。将水平方向的平衡方程 (式 (2) 第 2 式) 与力矩平衡方程 (式 (2) 第 3 式) 作为竖向平衡方程 (式 (2) 第 1 式) 的约束条件, 根据变分原理, 将地基极限承载力问题转换成标准的等周问题。

构造泛函:

$$J = 2b(p_u - q) = \int_{x_1}^{x_2} F dx \quad (7)$$

式中: $F = F_0 + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$ 。

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= (\sigma \tan \varphi + c)y' + \sigma - q - \gamma y \\ F_1 &= \sigma(y' - \tan \varphi) - c \\ F_2 &= (\sigma \tan \varphi + c)(y - xy') - \sigma(x + yy') + (q + \gamma y)x \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中: λ_1 和 λ_2 为待定的 Lagrange 乘子。

依据等周问题极值存在的必要条件, $\delta J = 0$, 并结合几何边界条件、积分约束条件及滑裂面端点水平向可动特性, 得出下列与泛函取驻值等价的边值问题:

(1) 欧拉方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \sigma} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \sigma'} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(2) 约束条件

$$\left. \begin{aligned} H|_{x=x_1} &= M|_{x=x_1} = 0 \\ H|_{x=x_2} &= M|_{x=x_2} = 0 \\ V|_{x=x_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(3) 边界条件

连续滑动面的一端点经过基础边缘, 即 $x_1 = -b$, 而另一端点 x_2 位置沿直线 $y = 0$ 移动, 则几何边界条件可表示为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -b \\ y|_{x=x_1} &= y|_{x=x_2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(4) 横截条件

$$\left. \begin{aligned} F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=x_1} &= 0 \\ F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=x_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

2.4 状态方程及打靶法求解

考虑到滑动面的端点 x_2 为未知的可动边界, 且该端点是与自变量 x 无关的待定常数。因此, 引入未知变量 W :

$$W(x) = x_2 \quad (13)$$

再引入新自变量 t 并作下列变量变换:

$$x = x_1 + t(W - x_1), t \in [0, 1] \quad (14)$$

结合式 (13), 有

$$\frac{dx}{dt} = W - x_1 \quad (15)$$

以 t 为自变量, 则原可动边界就转换为固定边界问题。即在引入新的自变量 t 和表示积分弧长区间大小的变量 W 后, 问题就转变为 t 在 $[0, 1]$ 上的两点边值问题。同时, 选取 $(y, \sigma, H, M, V, \lambda_1, \lambda_2, W)$ 作为未知量, 将控制方程 (9)、约束条件 (10) 和未知参数转化为一阶微分方程组的形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= (W - x_1) \frac{\tan \varphi (\lambda_1 - \lambda_2 y) - (1 - \lambda_2 x)}{\tan \varphi (1 - \lambda_2 x) + (\lambda_1 - \lambda_2 y)} \\ \frac{d\sigma}{dt} &= (W - x_1) \frac{2\lambda_2 (\sigma \tan \varphi + c) - \gamma (1 - \lambda_2 x)}{\tan \varphi (1 - \lambda_2 x) + (\lambda_1 - \lambda_2 y)} \\ \frac{dH}{dt} &= (W - x_1) [\sigma (y' - \tan \varphi) - c] \\ \frac{dM}{dt} &= (W - x_1) [(\sigma \tan \varphi + c)(y - xy') - \sigma(x + yy') + (q + \gamma y)x] \\ \frac{dV}{dt} &= (W - x_1) [(\sigma \tan \varphi + c)y' + \sigma - q - \gamma y] \\ \frac{d\lambda_1}{dt} &= \frac{d\lambda_2}{dt} = \frac{dW}{dt} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

上述状态方程相应的边界条件为式 (10)、(11) 和式 (12)。其中, 结合式 (7) 可得到横截条件式 (12) 的表达式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma|_{x=x_1} &= \frac{q(1 - \lambda_2 x) + \lambda_1 c}{1 - \lambda_2 x - \lambda_1 \tan \varphi} \Big|_{x=x_1} \\ \sigma|_{x=x_2} &= \frac{q(1 - \lambda_2 x) + \lambda_1 c}{1 - \lambda_2 x - \lambda_1 \tan \varphi} \Big|_{x=x_2} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

可以看出,问题的控制方程为 8 个常微分方程,而边界条件有 9 个,其中包括 5 个约束条件(式(10))、2 个几何边界条件(式(11)第 2 式)和 2 个横截条件(式(17))。为了得到的解答完全满足所有的边界条件,将约束条件(式(11)第 2 式)转化为如下等价形式:

$$(H^2 + M^2)|_{x=x_2} = 0 \quad (18)$$

至此,问题的 8 个常微分方程组对应 8 个边界条件,可进行求解。最后,可利用式(6)得到地基极限承载力解答。从式(16)可以看出问题的控制方程为耦合的非线性常微分方程组,一般很难得到其解析解答,而打靶法为此类复杂问题的精确求解提供了途径。关于打靶法的具体计算过程可参考文献[21-22],这里不再赘述。

3 数值算例

在复合地基设计中,常用的分析方法为等效强度指标法,即处理后复合地基的等效强度指标可简化为

$$\left. \begin{aligned} c_{SR} &= mc_R + (1-m)c_s \\ \tan \varphi_{SR} &= m \tan \varphi_R + (1-m) \tan \varphi_s \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中: c_{SR} 和 φ_{SR} 分别表示加固区复合土体的等效黏聚力和内摩擦角; m 为复合地基桩土面积置换率, $m = \Omega_R / \Omega$ 。

基于变分极限平衡法,本文对复合地基极限承载力进行了数值求解,并且与采用等效强度指标(式(19))得到的均质地基进行了比较。为了分析方便,数值算例引入如下无量纲化变量:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{b}, \bar{y} = \frac{y}{b}, \bar{\rho} = \frac{\rho}{b}, \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma_s} \\ \bar{q} &= \frac{q}{\gamma_s b}, \bar{c} = \frac{c}{\gamma_s b}, \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\gamma_s b}, \bar{p}_u = \frac{p_u}{\gamma_s b} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

为了分析增强体材料强度指标对复合地基极限承载力的影响,考虑基体材料参数 $\bar{c}_s = 0.25$, $\varphi_s = 10^\circ$, $\bar{\gamma}_s = \bar{\gamma}_R = 1$, 增强体宽度 $\bar{\rho} = 0.1$, 图 2 分别给出了置换率 m 为 0.042、0.063、0.125 时不同 $\bar{c}_R$ 和 φ_R 情形下复合地基极限承载力的变化曲线以及地基潜在滑移面的形状曲线。从图中可以看出,随着增强体抗剪强度指标 $\bar{c}_R$ 或 φ_R 的增加,复合地基极限承载力均随之增大。并且,随着置换率的增大,内摩擦角 φ_R 的影响更为显著。与复合地基设计中常用的等效抗剪强度指标方法相比较,分别考虑增强体的

$\bar{c}_R = 4.0$ 和 $\varphi_R = 30^\circ$, 当 $m = 0.042$ 时,两种计算方法得到的极限承载力相对误差分别为 0.67% 和 1.53%; 当 $m = 0.063$ 时,两者的相对误差分别为 0.81% 和 2.85%; 而当 $m = 0.125$ 时,两者的相对误差分别为 0.98% 和 9.0%。可见,在置换率较小的情形下,不同置换率时精确解答和等效强度指标方法得到的复合地基极限承载力结果基本相近,两者相对误差均小于 10%。因此,等效强度指标方法可作为计算复合地基极限承载力的一种简单而有效的方法。从图 2 还可以看出,不同的置换率 m 下,增强体的黏聚力 $\bar{c}_R$ 变化对地基潜在滑移面的形状影响不大,且基本为光滑的曲线,而增强体内摩擦角 φ_R 变化对滑移面的形状影响较为显著。并且,复合地基土体内摩擦角的非均匀性导致潜在滑移面不再是光滑的曲线,而呈波动起伏变化。

理论上讲,当置换率逐渐增大时,地基将从天然土均质地基($m = 0$)变为桩体复合地基($0 < m < 1$),再到增强体材料形成的均质地基($m = 1$)。为了更进一步分析复合地基极限承载力随置换率的变化规律,图 3 给出了考虑增强体材料强度指标 $\bar{c}_R = 1.50$, $\varphi_R = 10^\circ$ 以及 $\bar{c}_R = 0.25$, $\varphi_R = 30^\circ$ 时,复合地基极限承载力随置换率的变化曲线。从图可以发现,随着地基置换率的增加,地基中增强体的体积份数不断增大,从而导致地基极限承载力随之增大,且增强体材料内摩擦角的影响更加显著。并且,本文方法与等效强度指标简化算法的变化趋势以及数值基本接近,进一步说明了常用的等效强度指标法的有效性。

为了清晰地显示置换率变化对地基潜在滑移面以及法向应力分布的影响,图 4 给出了当置换率 m 分别为 0.25、0.50、0.75 时不同 $\bar{c}_R$ 和 φ_R 情形下复合地基潜在滑移面以及滑移面上法向应力的分布曲线,并与均质地基(m 分别为 0 和 1)进行了比较。从图中可以看出,随着置换率的增大,地基内部潜在滑移面的范围以及滑移面上的法向应力分布不断发生变化,条形基础边缘 x_1 处的法向应力最大,并随着置换率的增大而增加。置换率 $m = 1$ 的两种均质地基与 $m = 0$ 时的天然地基相比较,可以发现,相比土体的黏聚力变化,地基土的内摩擦角对极限承载力以及地基潜在滑移面的形状影响更为显著。与等效强度指标法的计算结果相比较,可以看出二者的滑移面位置以及法向应力分布基本一致,这进一步说明了采用简化的等效强度指标法可以有效地分析复合地基极限承载力。

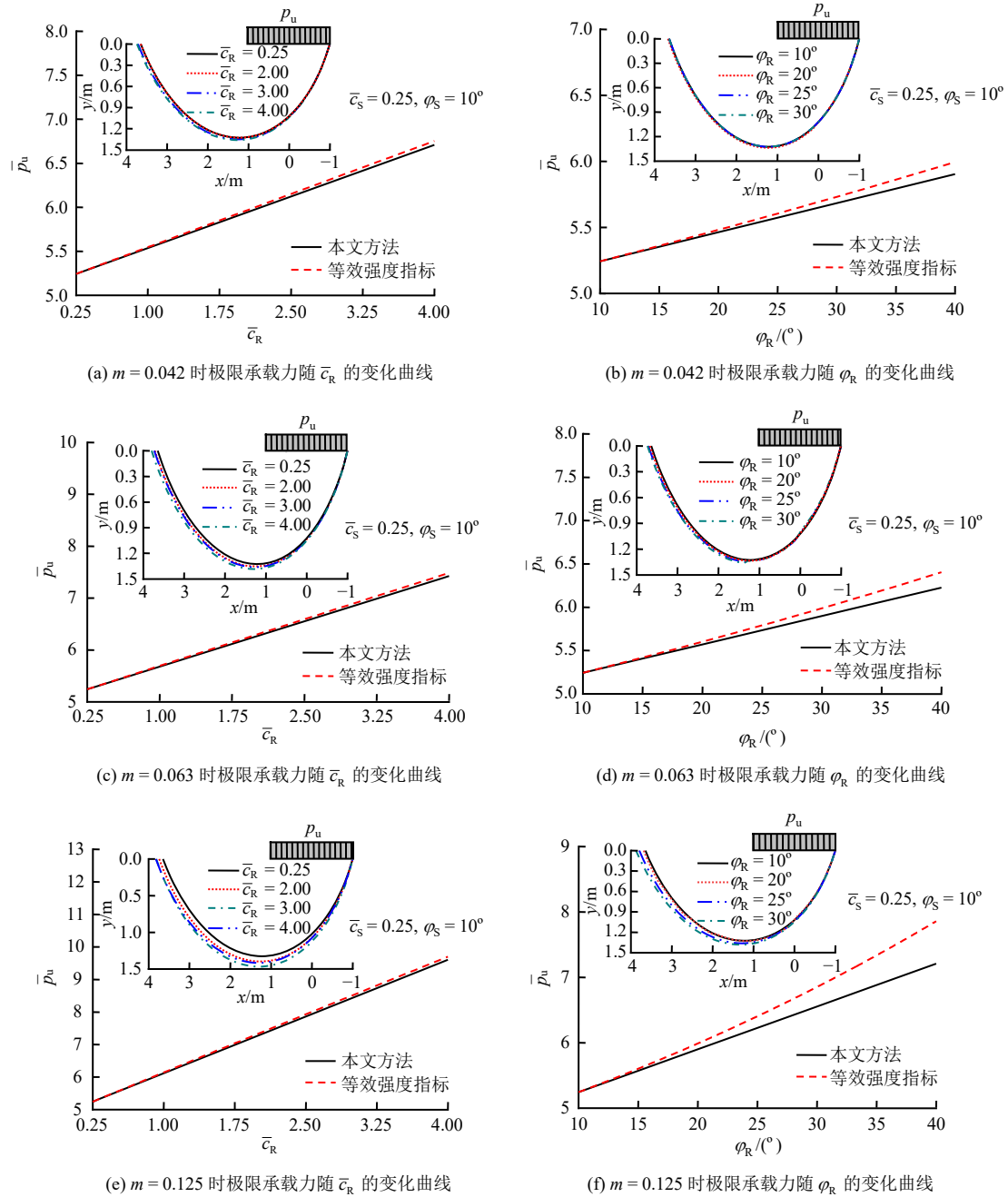
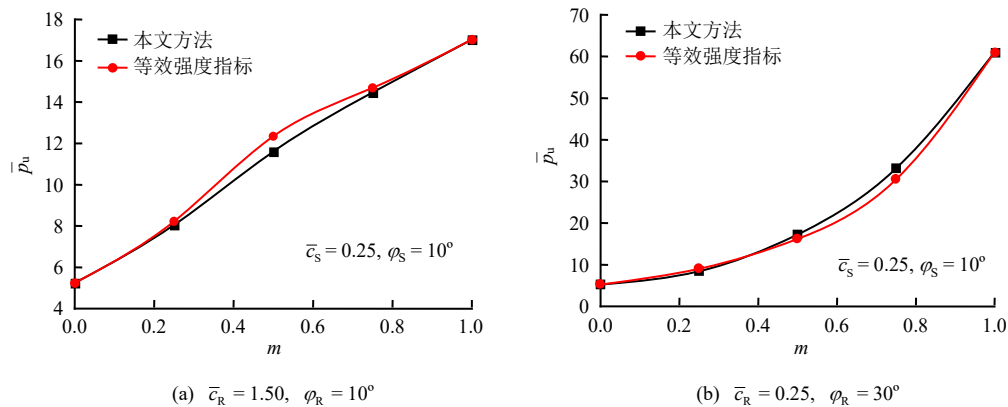
图 2 不同置换率下极限承载力随 $\bar{c}_R$ 和 φ_R 的变化曲线Fig.2 The variation curves of ultimate bearing capacity with $\bar{c}_R$ and φ_R under different replacement ratios

图 3 极限承载力随地基置换率的变化曲线

Fig.3 The variation curves of ultimate bearing capacity with the replacement ratios of foundation

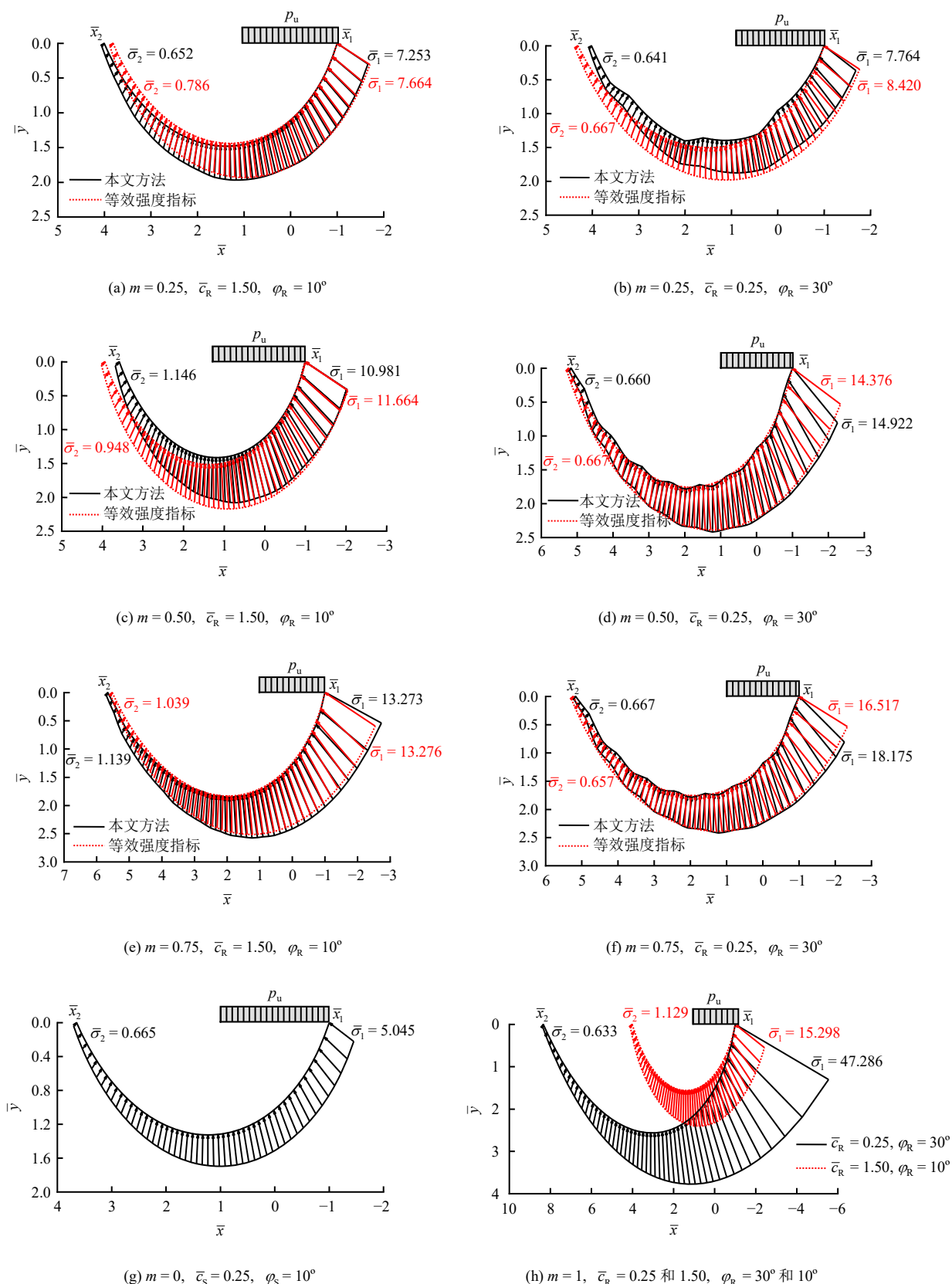


图 4 不同置换率下潜在滑移面以及滑移面上法向应力的分布曲线

Fig.4 The distribution curves of potential sliding surface and normal stress under different displacement ratios

4 结 论

针对复合地基极限承载力问题，基于变分极限

平衡法，建立了复合地基极限承载力的状态方程，并利用打靶法分析了地基承载力和滑移面以及法向应力分布。通过数值算例，分析了置换率、增强体

黏聚力和内摩擦角对地基极限承载力的影响, 可得出如下结论:

(1) 变分极限平衡法结合打靶法可以有效求解条形基础下复合地基承载力问题, 可以得到复合地基极限承载力、滑移面形状以及滑面上法向应力分布的精确解答。

(2) 复合地基极限承载力随着增强体置换率、黏聚力和内摩擦角的增大而增大, 滑移面范围以及滑移面上最大法向应力也随之增加, 且在相同置换率的条件下内摩擦角的影响最为显著。

(3) 通过数值算例证明了简化的等效强度指标法可以有效地分析复合地基极限承载力问题。

参考文献

- [1] SOUBRA A H. Upper-bound solutions for bearing capacity of foundations[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 1999, 125(1): 59-68.
- [2] WANG Y J, YIN J H, CHEN Z Y. Calculation of bearing capacity of a strip footing using an upper bound method[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2001, 25(8): 841-851.
- [3] 王均星, 李泽. 基于非线性规划的有限元塑性极限分析下限法研究[J]. 岩土力学, 2008, 29(6): 1471-1476.
WANG Jun-xing, LI Ze. Research on lower bound method of plastic limit analysis using finite elements based on nonlinear programming[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2008, 29(6): 1471-1476.
- [4] 秦会来, 黄茂松, 王玉杰. 地基承载力上限分析中的 Monte Carlo 搜索技术[J]. 岩土力学, 2010, 31(10): 3145-3150.
QIN Hui-lai, HUANG Mao-song, WANG Yu-jie. Application of Monte Carlo search technique to bearing capacity calculations by upper bound method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2010, 31(10): 3145-3150.
- [5] 李承超, 关云飞, 蔡正银, 等. 基于严格滑移线场理论临坡条形基础地基极限承载力分析[J]. 岩土工程学报, 2021, 43(8): 1408-1416.
LI Cheng-chao, GUAN Yun-fei, CAI Zheng-yin, et al. Ultimate bearing capacity of strip footings placed near slopes determined by rigorous slip line field theory[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2021, 43(8): 1408-1416.
- [6] 王冬勇, 陈曦, 于玉贞, 等. 基于二阶锥规划有限元增量加载法的条形浅基础极限承载力分析[J]. 岩土力学, 2019, 40(12): 4890-4896, 4924.
WANG Dong-yong, CHEN Xi, YU Yu-zhen, et al. Ultimate bearing capacity analysis of shallow strip footing based on second-order cone programming optimized incremental loading finite element method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2019, 40(12): 4890-4896, 4924.
- [7] NGUYEN H C, VO-MINH T. The use of the node-based smoothed finite element method to estimate static and seismic bearing capacities of shallow strip footings[J]. **Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering**, 2022, 14(1): 180-196.
- [8] 王成华, 张薇. 人工神经网络在桩基工程中的应用综述[J]. 岩土力学, 2002, 23(2): 173-178.
WANG Cheng-hua, ZHANG Wei. Application of artificial neural networks to pile foundation engineering[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2002, 23(2): 173-178.
- [9] ETEZAD M, HANNA A M, AYADAT T. Bearing capacity of a group of stone columns in soft soil[J]. **International Journal of Geomechanics**, 2014, 15(2): 1943-5622.
- [10] GUEGUIN M, HASSEN G, BUHAN P D. Stability analysis of homogenized stone column reinforced foundations using a numerical yield design approach[J]. **Computers and Geotechnics**, 2015, 64(5): 10-19.
- [11] RASHID A S A, BLACK J A, KUEH A B H. Behaviour of weak soils reinforced with soil cement columns formed by the deep mixing method: rigid and flexible footings[J]. **Measurement**, 2015, 68: 262-279.
- [12] BOUASSIDA M, PORBAHA A. Ultimate bearing capacity of soft clays reinforced by a group of columns-application to a deep mixing technique[J]. **Soils and Foundations**, 2004, 44(3): 91-101.
- [13] JELLALI B, BOUASSIDA M, BUHAN P D. A homogenization method for estimating the bearing capacity of soils reinforced by columns[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods**, 2005, 29(10): 989-1004.
- [14] BOUASSIDA M, MOHAMMED Y F, MEZNI N. Bearing capacity of foundation on soil reinforced by deep mixing columns[J]. **Geomechanics and Geoengineering**, 2022, 17(1): 309-320.
- [15] KOPASCY J. Three dimensional stress distribution and slip surfaces in earth works at rupture[C]//Proceedings of the 4th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. London: [s. n.], 1957.